1) Discutere e risolvere il sistema

$$\begin{cases} 6x + 2y + kz = 8 \\ 3x + y - 4z = 4 \\ 4x - y - 4z = 2 \end{cases}$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$. Per $k = -8$, determinare gli autovalori ed autovettori della matrice incompleta.

Soluzione. Il sistema in esame ha tre equazioni e tre incognite e, per il Teorema di Cramer, ammette un'unica soluzione se il determinante della matrice incompleta è diverso da zero.

Indicata con A la matrice incompleta

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & k \\ 3 & 1 & -4 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix},$$

ricaviamo $det(A) = -7(k + 8)$.

Per $k \neq -8$, il Teorema di Cramer fornisce anche le soluzioni del sistema, cioè:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 2 & k \\ 4 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix}}{-7(k+8)} = \frac{6}{7}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 8 & k \\ 3 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -4 \end{vmatrix}}{-7(k+8)} = \frac{10}{7}, \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-7(k+8)} = 0\,.$$

Se invece $k = -8$, allora conviene applicare il Teorema di Rouchè-Capelli. Questo teorema stabilisce che il sistema ha soluzioni se e soltanto se la matrice incompleta A e la matrice completa AB hanno la stessa caratteristica (o lo stesso rango). Per concludere la discussione basta pertanto calcolare la caratteristica delle due matrici (ovviamente per $k = -8$).

Abbiamo già visto che $det(A) = 0$ e quindi A non può avere caratteristica tre. Eliminando, ad esempio, la prima riga e la terza colonna di A, si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è chiaramente non nullo. Quindi $car(A) = 2$.

Passiamo adesso alla caratteristica della matrice

$$AB = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -8 & 8 \\ 3 & 1 & -4 & 4 \\ 4 & -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

La sua caratteristica è maggiore o uguale alla caratteristica della matrice A (cioè 2) ed è minore o uguale a 3 (dato che ha solo tre righe). Se ci accorgiamo che la prima riga è il doppio della seconda riga, allora possiamo subito concludere che $car(AB) = 2$. Altrimenti dobbiamo calcolare il determinante di tutti i minori 3×3 di AB. È sufficiente che uno di questi determinanti sia non nullo per concludere che $car(AB) = 3$, mentre vanno controllati tutti e quattro per concludere che $car(AB) = 2$.

Per chi volesse evitare il calcolo di altri determinanti, un meteodo alternativo è quello di ridurre la matrice a scala. Con questo metodo è inevitabile accorgersi che una riga si annulla completamente.

Comunque, eventualmente dopo un po' di conti, possiamo dedurre che

$$car(A) = car(AB) = 2\,.$$

Il Teorema di Rouchè-Capelli afferma che il nostro sistema ha infinite soluzioni dipendenti da un numero di parametri pari a $n - r$, dove n è il numero di incognite e r il rango (o caratteristica) delle matrici A e AB. Nel nostro caso $3 - 2 = 1$. Se $k = -8$, allora il sistema ammette infinite soluzioni dipendenti da un unico parametro (schematicamente: ∞^1 soluzioni).

Adesso restano solo da determinare queste soluzioni. Un metodo che riduce notevolmente le possibilità di aggiungere errori di calcolo è quello di utilizzare il Teorema di Cramer.

Per concludere che $car(A) = 2$ avevamo preso in considerazione la sottomatrice di A ottenuta eliminando la prima riga e la terza colonna. Se modifichiamo il sistema originario eliminando la prima equazione (corrispondente alla prima riga) e considerando la variabile z (corrispondente alla terza colonna) come un parametro, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 3x + y = 4 + 4z \\ 4x - y = 2 + 4z \end{cases}$$

che è equivalente a quello in esame (cioè ha le stesse soluzioni) e la cui matrice incompleta associata ha determinante non nullo.

Per il Teorema di Cramer possiamo scrivere

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4+4z & 1 \\ 2+4z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-6-8z}{-7} = \frac{6+8z}{7}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4+4z \\ 4 & 2+4z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{10+4z}{7}.$$

Riassumendo, per $k = -8$ il sistema ammette infinite soluzioni che possono essere espresse nella forma

$$\left(\frac{6+8z}{7}, \frac{10+4z}{7}, z \right), \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Passiamo adesso al calcolo degli autovalori ed autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -8 \\ 3 & 1 & -4 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix},$$

Sappiamo che gli autovalori ed autovettori sono collegati al sistema omogeneo associato alla matrice

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 6-\lambda & 2 & -8 \\ 3 & 1-\lambda & -4 \\ 4 & -1 & -4-\lambda \end{pmatrix}.$$

In particolare, gli autovalori sono tutti e soli i valori di λ che annullano il determinante di questa matrice e che quindi assicurano l'esistenza di infinite soluzioni; gli autovettori relativi ad un autovalore λ sono appunto le soluzioni non nulle del sistema per quel valore di λ.

Per prima cosa calcoliamo dunque il determinante. Esso risulta uguale a

$$det(A(\lambda)) = -\lambda^3 + 3\lambda^2,$$

che si annulla per $\lambda = 0$ e per $\lambda = 3$.

Gli autovettori relativi all'autovalore 0 sono tutte e sole le soluzioni non nulle del sistema

$$\begin{cases} 6x + 2y - 8z = 0 \\ 3x + y - 4z = 0 \\ 4x - y - 4z = 0 \end{cases}.$$

La matrice incompleta associata al sistema ha rango 2 (come si vede eliminando, ad esempio la prima riga e la terza colonna). Quindi le soluzioni sono tutte e sole le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 3x + y = 4z \\ 4x - y = 4z \end{cases}.$$

Per il Teorema di Cramer possiamo scrivere

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4z & 1 \\ 4z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-8z}{-7} = \frac{8}{7}z\,, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4z \\ 4 & 4z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{4}{7}z\,.$$

Quindi gli autovettori relativi all'autovalore 0 possono essere espressi nella forma

$$\left(\frac{8z}{7}\,,\frac{4z}{7}\,,z\right)\ ,\quad \forall z \in \mathbb{R}\,,\ z \neq 0\,,\ \text{oppure nella forma}\ (8z\,,4z\,,7z)\ ,\quad \forall z \in \mathbb{R}\,,\ z \neq 0\,.$$

In modo del tutto analogo, gli autovettori relativi all'autovalore 3 sono tutte e sole le soluzioni non nulle del sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y - 8z = 0 \\ 3x - 2y - 4z = 0 \\ 4x - y - 7z = 0 \end{cases}.$$

La matrice incompleta associata al sistema ha rango 2 (come si vede eliminando, ad esempio la terza riga e la terza colonna). Quindi le soluzioni sono tutte e sole le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8z \\ 3x - 2y = 4z \end{cases}.$$

Per il Teorema di Cramer possiamo scrivere

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8z & 2 \\ 4z & -2 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{-24z}{-12} = 2z\,, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 8z \\ 3 & 4z \end{vmatrix}}{-12} = \frac{-12z}{-12} = z\,.$$

Pertanto gli autovettori relativi all'autovalore 3 possono essere espressi nella forma

$$(2z\,,z\,,z)\ ,\quad \forall z \in \mathbb{R}\,,\ z \neq 0\,.$$

2) Data la funzione $f(x,y) = y^3(x^2 + y^2 - 2x)$ nel cerchio centrato in $(1,0)$ e raggio 2, studiarne il segno, classificare i punti critici e trovare i valori massimo e minimo.

Soluzione. Studiamo il segno della funzione f. Essendo già espressa come prodotto di due fattori, è sufficiente studiare il segno dei singoli fattori. Il primo è immediato. Infatti $y^3 > 0$ equivale a $y > 0$. Quindi il primo fattore è positivo nel semipiano al di sopra dell'asse delle ascisse.

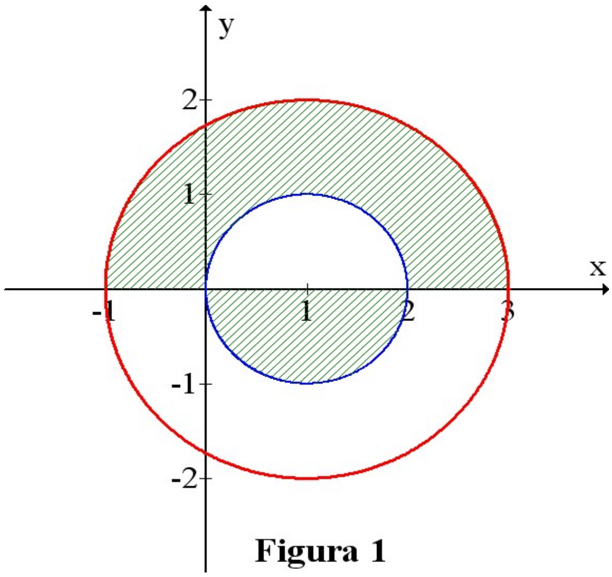


Figura 1

Il secondo fattore ricorda l'equazione di una circonferenza. Possiamo riscrivere $x^2+y^2-2x > 0$ nella forma $(x-1)^2 + y^2 > 1$. Quest'ultima ci dice che il secondo fattore è positivo in un punto (x,y) se la sua distanza dal punto $(1,0)$ è maggiore di 1 ed è quindi negativo all'interno del cerchio di centro $(1,0)$ e raggio 1.

Mettendo insieme le informazioni giungiamo alla Figura 1, dove è messa in evidenza la regione all'interno del dominio in cui la funzione è positiva.

Cerchiamo adesso i punti critici della funzione all'interno del cerchio assegnato. Sappiamo che i punti critici sono i punti in cui si annulla il gradiente, cioè i punti di coordinate (x,y) che verificano il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} .$$

Nel caso della nostra funzione troviamo il sistema

$$\begin{cases} y^3(2x-2) = 0 \\ y^2(3x^2+5y^2-6x) = 0 \end{cases} .$$

La prima equazione è verificata se e soltanto se $y = 0$ oppure $x = 1$. Chiaramente $y = 0$ è sufficiente a verificare anche la seconda equazione e quindi tutti i punti con ordinata nulla, cioè sull'asse delle ascisse, sono punti critici. Se invece imponiamo $x = 1$, allora la seconda equazione diventa

$$y^2(5y^2-3) = 0\,,$$

che è verificata se e solo se $y = 0$ (punto già trovato) oppure $y = \sqrt{\frac{3}{5}}$ oppure $y = -\sqrt{\frac{3}{5}}$. Riassumendo, tutti i punti critici della funzione f sono i punti sull'asse delle ascisse ed i punti

$$P_1 = (1, \sqrt{\frac{3}{5}})\ , \qquad P_2 = (1, -\sqrt{\frac{3}{5}})\,.$$

Per classificare i punti critici tentiamo la strada più semplice, cioè analizzando la matrice hessiana. Risulta

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y^3 & 3y^2(2x-2) \\ 3y^2(2x-2) & 2y(3x^2+10y^2-6x) \end{pmatrix} .$$

Cominciando dal punto P_1, otteniamo

$$H(1, \sqrt{\frac{3}{5}}) = \begin{pmatrix} \frac{6}{5}\sqrt{\frac{3}{5}} & 0 \\ 0 & 6\sqrt{\frac{3}{5}} \end{pmatrix} .$$

Il determinante è chiaramente positivo, gli elementi sulla diagonale principale sono positivi, e quindi P_1 è un punto di minimo locale.

Passando a P_2, otteniamo

$$H(1, -\sqrt{\frac{3}{5}}) = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5}\sqrt{\frac{3}{5}} & 0 \\ 0 & -6\sqrt{\frac{3}{5}} \end{pmatrix} .$$

Il determinante è chiaramente positivo, gli elementi sulla diagonale principale sono negativi, e quindi P_2 è un punto di massimo locale.

Purtroppo la matrice si annulla in ogni punto sull'asse delle ascisse e quindi si annulla anche il suo determinante, negandoci informazioni utili alla classificazione. Avendo però studiato il segno della funzione f, possiamo osservare che il valore della funzione sull'asse delle ascisse è zero e che ogni punto su tale asse non può essere di massimo o minimo locale in quanto la funzione assume, nelle sue vicinanze, sia valori positivi che valori negativi. Pertanto ogni punto sull'asse delle ascisse è un punto di sella.

Per determinare il valore massimo e minimo assunto dalla funzione f nel cerchio di raggio 2 centrato in $(1,0)$ dovremo tener conto dei valori assunti sui punti critici trovati ma anche dei valori assunti sulla frontiera del dominio. Per far ciò utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Il primo passo è quello di specificare il dominio in modo analitico. Tutti i punti del dominio sono caratterizzati dal fatto che la loro distanza dal punto $(1,0)$ è minore o uguale a 2. In altre parole, un punto (x,y) appartiene al dominio se e solo se

$$(x-1)^2 + y^2 \leq 4\,.$$

Introdotta la funzione $g(x,y) = (x-1)^2 + y^2 - 4$ possiamo quindi affermare che i punti sul bordo del nostro dominio sono i punti che verificano l'equazione $g(x,y) = 0$. Pertanto i punti sulla circonferenza che possono essere massimi o minimi per la funzione $f(x,y)$ sono quelli che verificano il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y) \\ f_y(x,y) = \lambda g_y(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} .$$

Nel nostro caso il sistema diventa

$$\begin{cases} y^3(2x-2) = \lambda(2x-2) \\ y^2(3x^2+5y^2-6x) = \lambda 2y \\ (x-1)^2+y^2-4=0 \end{cases} .$$

La prima equazione può essere riscritta nella forma

$$(y^3-\lambda)(x-1) = 0\,,$$

che è verificata se e solo se $x = 1$ oppure $y^3 = \lambda$.

Se $x = 1$ allora la terza equazione implica $y = \pm 2$ (e la seconda equazione determina λ, che a noi non interessa).

Se invece $\lambda = y^3$, allora la seconda equazione diventa

$$y^2(3x^2+3y^2-6x) = 0\,,$$

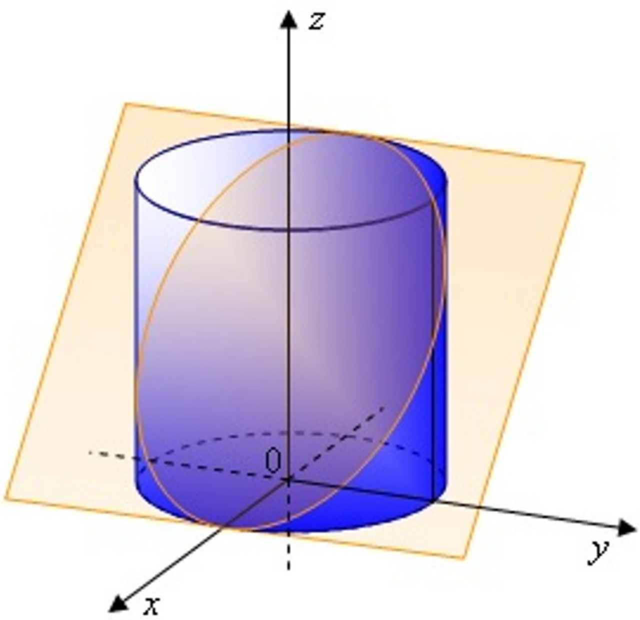
che è verificata se e solo se $y = 0$ oppure $x^2 + y^2 = 2x$. D'altra parte se $y = 0$ abbiamo già visto che la funzione f si annulla. Se $x^2 + y^2 = 2x$, la terza equazione risulta impossibile.

Quindi i punti da considerare per la ricerca del massimo e minimo valore della funzione f sono $(1, -\sqrt{3/5})$, $(1, \sqrt{3/5})$, $(1, -2)$ e $(1, 2)$.

Calcolando il valore della f in ognuno di questi punti ($f(1, -\sqrt{3/5}) = \frac{6}{25}\sqrt{3/5}, \dots$) scopriamo che i valori massimo e minimo assunti dalla funzione f nel nostro dominio sono 24 e -24. In questo caso, tali valori sono assunti nei punti critici P_1 e P_2 interni al dominio.

3) Un cilindro circolare retto ha raggio di base pari a 5 metri ed altezza di 10 metri. Un piano che forma un angolo di 45° con la base del cilindro lo divide in due parti di ugual volume. Determinare il baricentro di una delle due parti del cilindro.

Soluzione.



Per prima cosa cerchiamo di capire come è disposto il nostro piano, che indicheremo con π. Per dividere il cilindro in due parti di ugual volume, il piano dovrà passare dal baricentro (o centroide) del cilindro.

Basta abbozzare un prospetto per accorgersi che il piano per tale punto inclinato a 45° è tangente alle due circonferenze di base del cilindro.

Detto questo, ricordandosi le formule che esprimono le coordinate del baricentro di un solido per mezzo di integrali tripli, non ci resta che descrivere il nostro solido S tramite le coordinate dei suoi punti.
Introduciamo un opportuno sistema di riferimento (opportuno nel senso che semplifichi i calcoli che ci apprestiamo a fare). Come

nella figura qui sopra, fissiamo come origine il centro della base inferiore del cilindro, l'asse z parallela all'asse di rotazione e supponiamo poi che il piano π sia parallelo all'asse y.

Ci sono molti modi per ricavarsi l'equazione del piano π. Il più semplice è forse quello di imporre che il vettore giacitura sia parallelo al vettore $(1, 0, 1)$ e che π passi per il punto di coordinate $(5, 0, 0)$. La prima condizione ci dice che l'equazione di π è della forma $x+z+d = 0$, con $d \in \mathbb{R}$. La seconda implica $5 + d = 0$ e quindi l'equazione cercata è

$$x + z = 5\,. \tag{1}$$

L'equazione del cilindro discende dalla definizione: i punti sulla superficie del cilindro sono quelli che distano 5 dall'asse z. Guardando in pianta allora otteniamo

$$x^2 + y^2 = 25\,. \tag{2}$$

Adesso stabiliamo gli intervalli di variabilità delle coordinate cominciando dalla y. Chiaramente (pensando alla proiezione del mezzo cilindro S sull'asse delle y) avremo

$$-5 \leq y \leq 5\,.$$

L'ascissa dei punti del nostro solido, per ogni y fissata, è sempre compresa tra i valori delle ascisse dei due punti della circonferenza di base ad ordinata y. Tali ascisse si ricaveranno dalla equazione (2), ottenendo

$$-\sqrt{25 - y^2} \leq x \leq \sqrt{25 - y^2}\,.$$

La quota di ogni punto con proiezione in pianta fissata (cioè per x e y fissati) è compresa tra quella del punto nella base e quella del punto sul piano π. La prima è 0 e la seconda si ricava dalla equazione (1). In totale

$$0 \leq z \leq 5 - x\,.$$

A questo punto si possono impostare i calcoli. Indicate con (x_G, y_G, z_G) le coordinate del baricentro e ricordando che il volume di S è la metà di quello del cilindro (area di base per altezza), possiamo scrivere:

$$x_G = \frac{1}{125\pi} \iiint_S x\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{125\pi} \int_{-5}^{5} \int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} \int_0^{5-x} x\, dz\, dx\, dy\,,$$

$$y_G = \frac{1}{125\pi} \iiint_S y\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{125\pi} \int_{-5}^{5} \int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} \int_0^{5-x} y\, dz\, dx\, dy\,,$$

$$z_G = \frac{1}{125\pi} \iiint_S z\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{125\pi} \int_{-5}^{5} \int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} \int_0^{5-x} z\, dz\, dx\, dy\,.$$

Poiché il piano $y = 0$ è un piano di simmetria di S, sappiamo che risulterà $y_G = 0$ senza dover svolgere i calcoli sopra impostati.

Volendo calcolare x_G, invece, ci tocca svolgere gli integrali uno alla volta.

Il primo è semplicissimo:

$$\int_0^{5-x} x\, dz = [xz]_0^{5-x} = x(5 - x) - x(0) = 5x - x^2\,.$$

Il secondo è facile:

$$\int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} 5x - x^2\,dx = \left[\frac{5}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} = -\frac{2}{3}(25-y^2)^{\frac{3}{2}}\,.$$

Il terzo è decisamente complicato:

$$-\frac{2}{3}\int_{-5}^{5}(25-y^2)^{\frac{3}{2}}\,dy = -\frac{2}{3}\left[\frac{1}{4}y(25-y^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{75}{8}y\sqrt{25-y^2} + \frac{1875}{8}\arcsin(\frac{y}{5})\right]_{-5}^{5} = -\frac{625\pi}{4}\,.$$

Ne segue $x_G = -\frac{5}{4}$. Nel calcolo del terzo integrale avremmo potuto eseguire la sostituzione $y = 5\sin t$ e poi utilizzare le formule di duplicazione per il coseno di un angolo. In dettaglio

$$\begin{aligned}
-\frac{2}{3}\int_{-5}^{5}(25-y^2)^{\frac{3}{2}}\,dy &= -\frac{2}{3}125\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}\,5\cos t\,dt = -\frac{1250}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4 t\,dt \\
&= -\frac{1250}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos(4t)}{8} + \frac{\cos(2t)}{2} + \frac{3}{8}\,dt \\
&= -\frac{1250}{3}\left[\frac{\sin(4t)}{32} + \frac{\sin(2t)}{4} + \frac{3t}{8}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = -\frac{625\pi}{4}\,.
\end{aligned}$$

Decisamente più corti sarebbero stati i calcoli se avessimo utilizzato le coordinate cilindriche, cioè le coordinate polari nel piano xy e la coordinata z.

In questo caso avremmo descritto il solido S tramite le disuguaglianze

$$0 \le \theta \le 2\pi\,,$$
$$0 \le r \le 5\,,$$
$$0 \le z \le 5 - x = 5 - r\cos\theta\,,$$

ed avremmo ottenuto (ricordando di scrivere $r\,dr\,d\theta\,dz$ al posto di $dx\,dy\,dz$)

$$\begin{aligned}
x_G &= \frac{1}{125\pi}\iiint_S r^2\cos\theta\,dr\,d\theta\,dz = \frac{1}{125\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^5\int_0^{5-r\cos\theta} r^2\cos\theta\,dz\,dr\,d\theta \\
&= \frac{1}{125\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^5 (5-r\cos\theta)r^2\cos\theta\,dr\,d\theta \\
&= \frac{1}{125\pi}\int_0^{2\pi}\left[(\frac{5}{3}r^3 - \frac{1}{4}r^4\cos\theta)\cos\theta\right]_0^5 d\theta = \frac{1}{125\pi}\int_0^{2\pi}\frac{625}{3}\cos\theta - \frac{625}{4}\cos^2\theta\,d\theta \\
&= \frac{5}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\cos\theta - \frac{1}{4}\frac{\cos(2\theta)+1}{2}\,d\theta = \frac{5}{\pi}\left[\frac{1}{3}\sin\theta - \frac{1}{16}\sin(2\theta) - \frac{\theta}{8}\right]_0^{2\pi} = -\frac{5}{4}\,.
\end{aligned}$$

In modo del tutto analogo possiamo procedere per calcolare z_G. Il primo integrale rimane ancora semplice:

$$\int_0^{5-x} z\,dz = \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{5-x} = \frac{1}{2}(5-x)^2\,.$$

Il secondo è facile:

$$\int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} \frac{1}{2}(5-x)^2\,dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{(5-x)^3}{3}\right]_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} = \frac{1}{6}\left[(5+\sqrt{25-y^2})^3-(5-\sqrt{25-y^2})^3\right]$$
$$= \frac{1}{3}(25-y^2)^{\frac{3}{2}}+25\sqrt{25-y^2}\,.$$

Grazie ai calcoli svolti in precedenza e ricordando una primitiva della funzione $\sqrt{a^2-x^2}$ ($\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|}$, reperibile su tutti i testi sull'argomento), il terzo diventa:

$$\frac{625\pi}{8}+25\left[\frac{y}{2}\sqrt{25-y^2}+\frac{25}{2}\arcsin\frac{y}{5}\right]_{-5}^{5} = 625\pi\frac{5}{8}\,.$$

Ne segue $z_G=\frac{25}{8}$. Le tecniche per risovere questo terzo integrale possono essere le stesse utilizzate per calcolare x_G. Anche qui i calcoli sarebbero stati meno noiosi se avessimo utilizzato le coordinate cilindriche.

Avremmo ottenuto

$$\begin{aligned}
z_G &= \frac{1}{125\pi}\iiint_S rz\,dr\,d\theta\,dz = \frac{1}{125\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^5\int_0^{5-r\cos\theta} rz\,dz\,dr\,d\theta \\
&= \frac{1}{125\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^5\left[\frac{rz^2}{2}\right]_0^{5-r\cos\theta} dr\,d\theta = \frac{1}{250\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^5 r(5-r\cos\theta)^2\,dr\,d\theta \\
&= \frac{1}{250\pi}\int_0^{2\pi}\left[25\frac{r^2}{2}-10\cos\theta\frac{r^3}{3}+\cos^2\theta\frac{r^4}{4}\right]_0^5 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{5}{2}-\frac{10}{3}\cos\theta+\frac{5}{4}\cos^2\theta\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{5}{2}-\frac{10}{3}\cos\theta+\frac{5}{4}\frac{\cos(2\theta)+1}{2}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{5}{2}\theta-\frac{10}{3}\sin\theta+\frac{5}{16}\sin(2\theta)+\frac{5\theta}{8}\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{25}{8}\,.
\end{aligned}$$